ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES DURÉE: 3 HEURES

Préambule :

Dans ce problème n est un entier naturel non nul, $M_n(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{C}$ corps des complexes. $M_1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$ sont identifiés de façon habituelle. I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$.

M étant une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et φ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, on note respectivement S(M) et S(φ) les ensembles de valeurs propres de M et φ, et $V_\lambda(M)$ (resp. $V_\lambda(\varphi)$) le sous-espace propre associé à une valeur propre λ de M (resp. φ). Enfin on désigne par f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui admet pour matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$; les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont identifiés aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Partie I

1. Soient A et B deux matrices de $M_3(\mathbb{C})$ telles que : AB = BA.

   a) Soit λ une valeur propre de A, démontrer que : $f_B\left(V_\lambda(A)\right)$ est inclus dans $V_\lambda(A)$.

   b) Démontrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^3$ qui est vecteur propre de f_A et f_B (On pourra discuter selon le nombre des éléments de S(A) par exemple).

   c) Démontrer que si A a trois valeurs propres distinctes alors f_A et f_B se diagonalisent dans la même base de $\mathbb{C}^3$. Cette propriété est-elle vraie pour toute matrice A diagonalisable de $M_3(\mathbb{C})$?

2. On suppose, dans cette question, que A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, quelconques telles que B soit diagonalisable.
   On considère l'équation : (1) AM = MB où M est une matrice inconnue de $M_n(\mathbb{C})$. On appelle E l'ensemble des solutions de (1).
   On définit de plus deux applications φ et ψ par :
   $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad \varphi(M) = AM$, $\psi(M) = MB$.
   Puis $u(M) = \varphi(M) - \psi(M)$ définit une application u.

   a) Démontrer que φ, ψ, u sont des endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$.
   Comparer : $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$, S(A) et S(φ), S(B) et S(ψ).

   b) Soit $\lambda \in S(A)$ et $X \neq 0$, $X \in V_\lambda(A)$
   $\mu \in S({}^tB)$ et $Y \neq 0$, $Y \in V_\mu({}^tB)$.
   Démontrer que la matrice $X{}^tY$ est un vecteur propre de u.

   c) Soit $\beta \in S(u)$ démontrer qu'il existe $\lambda \in S(A)$ et $\mu \in S(B)$ telles que $\beta = \lambda - \mu$.

   d) Démontrer l'équivalence : $S(A) \cap S(B) = \varnothing \iff$ u bijective.

   e) Dans cette question on prend n = 3 et : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   α) Déterminer S(A), S(B) et S(u).

   β) Déterminer E. E contient-il une matrice inversible ?

   γ) Résoudre l'équation : AM = MB + 3M (M inconnue).

   δ) En déduire que u est diagonalisable.

3. a) Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$.
   Démontrer que pour tout i entier, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe une matrice colonne $V \neq 0$ telle que : $\begin{cases} {}^tVX_j = 0 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ , } j \neq i. \\ {}^tVX_i \neq 0 \end{cases}$

   b) On suppose que A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que u est diagonalisable.

4. Déterminer le nombre des solutions de l'équation matricielle : $M^2 = A$ où A est définie en 2.e), M matrice inconnue.

Partie II

On se propose de résoudre une autre équation matricielle.
On donne $A = \begin{pmatrix} 12-2i & -6-2i & 6+2i \\ -6-2i & 3-5i & -3-i \\ 6+2i & -3-i & 3-5i \end{pmatrix}$ et l'équation : (2) $M^3 = A$, M matrice inconnue.

1. Déterminer S(A) et les vecteurs propres de A.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} b & c & 2 \\ a+b & c+d & -1 \\ a-b & d-c & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une relation entre les paramètres complexes a, b, c, d pour que P soit inversible. Dans ce cas calculer : $P^{-1}AP$.

3. Démontrer que l'on peut exprimer les matrices M diagonalisables vérifiant (2) à l'aide d'une matrice P inversible, de P^{-1} et de j (j racine cubique non réelle de 1).

4. On suppose qu'il existe M non diagonalisable vérifiant (2).

   a) Démontrer que M est semblable à une matrice du type :
   $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$ où α, β, γ, δ, h sont des complexes. Préciser h.

   b) On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Etudier S(B), calculer B^3, établir que :
   $(B - \omega I_2)(B - \omega j I_2)(B - \omega j^2 I_2) = 0$ où ω est un nombre complexe que l'on précisera.

   c) En étudiant le rang de $(B - \omega I_2)$, conclure quant à l'hypothèse envisagée dans cette question. Conclure quant aux solutions de (2).

FIN